Agrégation externe 2006
Analyse et Probabilités

Zéros des polynômes aléatoires

Corrigé par l'auteur du sujet

Partie I
Asymptotique du nombre de zéros

1. La fonction $A_n(t)$ est continue sur $[1,+\infty[$ et dominée par $\dfrac{1}{t^2}$ au voisinage de $+\infty$, donc intégrable sur $[1,+\infty[$. On a $A_n(t) = \dfrac{n^2}{t(t+2n)} = \dfrac{n}{2}\left(\dfrac{1}{t} - \dfrac{1}{t+2n}\right)$. Donc $\displaystyle\int_1^x A_n(t)dt = \frac{n}{2}\left[\ln\frac{t}{t+2n}\right]_1^x$, qui tend vers $\dfrac{n\ln(2n+1)}{2}$ lorsque x tend vers $+\infty$. Ainsi l'intégrale est bien convergente et

$$\int_1^{+\infty} A_n(t)dt = \frac{n\ln(2n+1)}{2}$$

2. (a) En multipliant par la quantité conjuguée, on a

$$|\delta_n(t) - A_n(t)| = |\sqrt{A_n^2(t) - B_n^2(t)} - A_n(t)| = \frac{B_n^2(t)}{\sqrt{A_n^2(t) - B_n^2(t)} + A_n(t)} \leqslant \frac{B_n^2(t)}{A_n(t)}.$$

(b) Par la formule du binôme,

$$\left(1+\frac{t}{n}\right)^{2n+2} - 1 = \sum_{k=1}^{2n+2}\binom{2n+2}{k}\left(\frac{t}{n}\right)^k \geqslant \sum_{k=1}^{2}\binom{2n+2}{k}\left(\frac{t}{n}\right)^k.$$

Ainsi, $\left(1+\dfrac{t}{n}\right)^{2n+2} - 1 \geqslant \dfrac{2n+2}{n}t + \dfrac{(2n+1)(2n+2)}{n^2}t^2 \geqslant 2t + 2t^2$. On obtient ainsi en inversant

$$\varphi_n(t) \leqslant \frac{1}{2t+2t^2}.$$

(c) On a $\varphi_n'(t) = -\dfrac{(2n+2)\left(1+\frac{t}{n}\right)^{2n+1}}{n\left(\left(1+\frac{t}{n}\right)^{2n+2} - 1\right)^2} < 0$. Puis

$$B_n^2(t) = -\varphi_n'(t)\frac{(n+1)^2 n}{(2n+2)\left(1+\frac{t}{n}\right)} = -\varphi_n'(t)\frac{n(n+1)}{2\left(1+\frac{t}{n}\right)}$$

De plus, $\dfrac{1}{A_n(t)} = \dfrac{t^2+2nt}{n^2} = \dfrac{2t}{n}\left(1+\dfrac{t}{2n}\right)$ et ainsi

$$|\delta_n(t) - A_n(t)| \leqslant -\frac{2}{n}t\varphi_n'(t)\left(1+\frac{t}{2n}\right)\frac{n(n+1)}{2\left(1+\frac{t}{n}\right)} \leqslant -(n+1)t\varphi_n'(t)$$

car $\dfrac{\left(1+\frac{t}{2n}\right)}{\left(1+\frac{t}{n}\right)} \leqslant 1$.

(d) A l'aide d'une intégration par parties, on a

$$\int_1^x |\delta_n(t) - A_n(t)|dt \leqslant -(n+1)\int_1^x t\varphi_n'(t)dt \leqslant (n+1)\left(\int_1^x \varphi_n(t)dt + \varphi_n(1) - x\varphi_n(x)\right)$$

En utilisant la majoration de la question 2b) pour $\varphi_n(t)$ et $\varphi_n(1)$, on a alors, en laissant tendre x vers $+\infty$,

$$\int_1^{+\infty} |\delta_n(t) - A_n(t)|dt \leqslant (n+1)\left(\frac{1}{4} + \int_1^{+\infty}\frac{1}{2t+2t^2}dt\right) \in O(n)$$

(e) On a $\delta_n(t) = A_n(t) + (\delta_n(t) - A_n(t))$ donc $\delta_n(t)$ est intégrable sur $[1, +\infty[$, et

$$\int_1^{+\infty} \delta_n(t)dt = \frac{n\ln(2n+1)}{2} + \int_1^{+\infty} (\delta_n(t) - A_n(t))dt$$

Or $\left|\int_1^{+\infty} (\delta_n(t) - A_n(t))dt\right| \leqslant \int_1^{+\infty} \big|(\delta_n(t) - A_n(t))\big|dt \in O(n)$, donc est négligeable devant $\dfrac{n\ln(2n+1)}{2}$.
Ainsi,

$$\int_1^{+\infty} \delta_n(t)dt \sim \frac{n\ln(2n+1)}{2} \sim \frac{n\ln n}{2}$$

3. (a) On a $\left(\left(1+\dfrac{t}{n}\right)^{2n+2} - 1\right)^2 = \dfrac{(2n+2)^2}{n^2}t^2 + o(t^2)$ et $\left(\dfrac{2t}{n} + \dfrac{t^2}{n^2}\right)^2 = \dfrac{4}{n^2}t^2 + o(t^2)$, de sorte que le terme en t^2 dans l'expression de $N_n(t)$ est nul, ainsi $N_n(t) = o(t^2)$.
Par l'unicité du développement limité, la formule de Taylor-Young fournit $N_n(0) = N_n'(0) = N_n''(0) = 0$.
La même formule de Taylor-Young donne alors $N_n(t) \in O(t^3)$ au voisinage de 0 (car N_n est $\mathcal{C}^3$).
Par ailleurs, $D_n(t) \sim \dfrac{16(n+1)^2}{n^4}t^4$ et ainsi $\delta_n^2(t) \in O\left(\dfrac{1}{t}\right)$. Comme $\delta_n(t) \in O\left(\dfrac{1}{\sqrt{t}}\right)$ au voisinage de 0, cette fonction est intégrable en 0.

(b) L'inégalité $\left(1+\dfrac{t}{n}\right)^{2n} \leqslant e^2$ provient par exemple de $\ln(1+x) \leqslant x$.

L'ensemble $\mathcal{B}$ est une sous-algèbre de l'algèbre des suites de fonctions, en vertu des arguments suivants :

- La suite nulle $(g_n = 0)_n$ est dans $\mathcal{B}$ ($M = 0$ convient). Cet argument n'est d'ailleurs pas nécessaire.
- La suite constante $(g_n = 1)_n$ est dans $\mathcal{B}$ ($M = 1$ convient).
- Si $(g_n)_n$ et $(h_n)_n$ sont dans $\mathcal{B}$, associés respectivement aux constantes M_g et M_h, alors $(\lambda g_n)_n$ est dans $\mathcal{B}$ ($|\lambda|M_g$ convient), et $(g_n + h_n)_n$ est dans $\mathcal{B}$ ($M_g + M_h$ convient). Par ailleurs, si $f_n = g_n \times h_n$,

$$|f_n| \leqslant M_g M_h,\ |f_n'| = |g_n' h_n + g_n h_n'| \leqslant 2M_g M_h,\ |f_n''| = |g_n'' h_n + 2g_n' h_n' + g_n h_n''| \leqslant 4M_g M_h$$

$$|f_n'''| = |g_n''' h_n + 3g_n'' h_n' + 3g_n' h_n'' + g_n h_n'''| \leqslant 8M_g M_h$$

Donc $(f_n)_n$ est dans $\mathcal{B}$.

On vérifie aisément que $\left(t \mapsto \left(1+\dfrac{t}{n}\right)^{2n}\right)_n$, $\left(t \mapsto \left(1+\dfrac{t}{n}\right)\right)_n$ et la suite de fonctions constantes $\left(t \mapsto \dfrac{4(n+1)^2}{n^2}\right)_n$ sont dans $\mathcal{B}$. La structure d'algèbre de $\mathcal{B}$ permet alors de conclure que $(N_n(t))_n$ est dans $\mathcal{B}$.

(c) Considérons M telle que $|N_n'''(t)| \leqslant M$ pour tout n et tout t. Par l'inégalité de Taylor-Lagrange à l'ordre 2 en 0, on a pour tout $t \in [0, 1]$,

$$|N_n(t)| \leqslant \frac{Mt^3}{6}$$

Par ailleurs, on peut minorer $D_n(t)$ par le premier terme de la formule du binôme pour obtenir

$$D_n(t) \geqslant \frac{16(n+1)^2}{n^4}t^4$$

Donc $\delta_n^2(t) \leqslant \dfrac{Mn^4}{96(n+1)^2\,t}$ et $\displaystyle\int_0^1 \delta_n(t)dt \leqslant \sqrt{\frac{M}{96}}\int_0^1 \frac{dt}{\sqrt{t}} \times \frac{n^2}{n+1} \in O(n)$.

4. (a) Comme $t > 1$, l'inégalité demandée est équivalente à $\dfrac{t^{2n+2} - 1}{t^2 - 1} \geqslant (n+1)t^n$. On a

$$\frac{t^{2n+2} - 1}{t^2 - 1} = \sum_{k=0}^{n} t^{2k} = \frac{1}{2}\sum_{k=0}^{n}(t^{2k} + t^{2n-2k})$$

On a $(t^{2k}+t^{2n-2k}) = t^n(t^{2k-n}+\frac{1}{t^{2k-n}}) \geqslant 2t^n$ d'après l'inégalité fournie par l'énoncé. En sommant,

$$\frac{t^{2n+2}-1}{t^2-1} \geqslant \frac{1}{2}\sum_{k=0}^{n} 2t^n = (n+1)t^n.$$

(b) Le changement de variable $t = 1+\frac{x}{n}$ envoie le domaine $]1,+\infty[$ dans le domaine $]0,+\infty[$. On retrouve dans l'intégrande l'expression de $\delta_n(x)$ et ainsi

$$E_n = \frac{4}{n\pi}\int_0^{+\infty}\delta_n(x)dx$$

Comme $\int_0^1 \delta_n(x)dx \in O(n)$, ce terme est négligeable devant $\int_1^{+\infty}\delta_n(x)dx$, et ainsi

$$E_n \sim \frac{2}{\pi}\ln n$$

Partie II
Balayages orthogonaux sur la sphère

II.A - Une mesure invariante sur la sphère

1. Lorsque K est un convexe contenant 0, alors le cône engendré par $S^{n-1}\cap K$ est inclus dans K, et donc de mesure de Lebesgue plus petite que celle de K. Ainsi,

$$\lambda_S\big(S^{n-1}\cap([-h,h]\times[-1,1]^{n-1})\big) \leqslant \frac{\lambda_n([-h,h]\times[-1,1]^{n-1})}{\lambda_n(B^n)} \leqslant \frac{2^n h}{\lambda_n(B^n)}$$

2. Si C est le cône engendré par A et C' est le cône engendré par $r(A)$, alors on a clairement $C' = r(C)$ par la linéarité de r. Donc $\lambda_n(C') = \lambda_n(r(C)) = \lambda_n(C)$ car r est une isométrie.

3. La rotation de matrice

$$M = \begin{pmatrix} \cos\theta & \sin\theta & & & \\ -\sin\theta & \cos\theta & & 0 & \\ & & 1 & & \\ & 0 & & \ddots & \\ & & & & 1 \end{pmatrix}$$

envoie $Q_{\theta,\theta+\theta'}$ dans $Q_{0,\theta'}$. Comme λ_S est invariante par rotation, on a $\lambda_S(Q_{\theta,\theta+\theta'}) = \lambda_S(Q_{0,\theta'})$. Or

$$\lambda_S(Q_{0,\theta+\theta'}) = \lambda_S(Q_{0,\theta}) + \lambda_S(Q_{\theta,\theta+\theta'}) - \lambda_S(Q_{\theta,\theta}).$$

Mais $Q_{\theta,\theta}$ est inclus dans un hyperplan, donc il en est de même de son cône engendré, et donc $\lambda_S(Q_{\theta,\theta}) = 0$. Ce qui conduit à la formule souhaitée.

La fonction $f(\theta) : [0,2\pi] \mapsto [0,1]$ définie par $f(\theta) = \lambda_S(Q_{0,\theta})$ est donc croissante, vérifie $f(0) = 0$ et $f(2\pi) = 1$, et $f(\theta+\theta') = f(\theta)+f(\theta')$ lorsque $\theta+\theta' \leqslant 2\pi$. On en déduit successivement que

- $f\left(\frac{2\pi}{q}\right) = \frac{1}{q}$ pour tout entier $q \geq 1$,
- $f(2\pi r) = r$ pour tout rationnel $r \in [0,1]$.

Comme f est croissante, pour tout $x \in [0,1]$ et $q \in \mathbb{N}^*$ on a

$$\frac{\llcorner qx \lrcorner}{q} \leqslant f(2\pi x) \leqslant \frac{\llcorner qx \lrcorner + 1}{q}$$

et on obtient $f(2\pi x) = x$ en laissant tendre q vers $+\infty$. Il vient alors

$$\lambda_S(Q_{\alpha,\beta}) = \lambda_S(Q_{0,\beta-\alpha}) = \frac{\beta-\alpha}{2\pi}$$

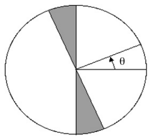
4. Remarquons tout d'abord que $L(ab) \in [0, \pi]$, et que $L(ab) \neq 0$ si $a \neq b$. On a

$$||b-a||^2 = ||b||^2 + ||a||^2 - 2\langle a, b\rangle = 2 - 2\cos L(ab) = 4\sin^2 \frac{L(ab)}{2}.$$

On a donc $||b-a|| = u(L(ab))$ avec $u(x) = 2\sin\frac{x}{2}$ (le signe est positif car $L(ab) \in [0,\pi]$). Ainsi, lorsque x tend vers 0^+, $u(x) \sim x$ et $u(x) - x \sim -\frac{x^3}{24}$. On en déduit que $\frac{u(x)-x}{u(x)^2} \to 0$. Par ailleurs, comme $u(x)$ ne s'annule pas sur $]0,\pi]$, la fonction $x \mapsto \frac{u(x)-x}{u(x)^2}$ est continue et prolongeable par continuité en 0. Elle est donc bornée par une constante K. On a alors $|u(x) - x| \leqslant Ku^2(x)$, d'où

$$||b-a|| - K||b-a||^2 \leqslant L(ab) \leqslant ||b-a|| + K||b-a||^2.$$

5. Soit $x = (x_1, x_2, \ldots, x_n) \in S^{n-1}$. On a $\langle x, a\rangle\langle x, b\rangle = x_1(x_1\cos\theta + x_2\sin\theta)$. Ainsi, ce produit est négatif lorsque x est dans le domaine grisé :



soit lorsque $x \in Q_{\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}+\theta} \cup Q_{-\frac{\pi}{2},-\frac{\pi}{2}+\theta}$. Comme l'intersection de ces deux quartiers de sphère est incluse dans l'hyperplan $x_1 = 0$, elle est de mesure nulle et

$$\lambda_S\left(Q_{\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}+\theta} \cup Q_{-\frac{\pi}{2},-\frac{\pi}{2}+\theta}\right) = \frac{\theta}{2\pi} + \frac{\theta}{2\pi} = \frac{\theta}{\pi} = \frac{L(ab)}{\pi}$$

Dans le cas général, on considère une rotation r qui envoie sur la base canonique une base orthonormée dont les deux premiers vecteurs sont (a, b'), où b' est tel que b est dans l'espace vectoriel engendré par (a, b'). Il existe une telle rotation car $n \geq 3$. On a alors

$$\{x \in S^{n-1}, \langle x, a\rangle\langle x, b\rangle \leqslant 0\} = \{x \in S^{n-1}, \langle r(x), r(a)\rangle\langle r(x), r(b)\rangle \leqslant 0\}$$

Par invariance par rotation,

$$\lambda_S(\{x \in S^{n-1}, \langle x, a\rangle\langle x, b\rangle \leqslant 0\}) = \lambda_S(\{x \in S^{n-1}, \langle x, r(a)\rangle\langle x, r(b)\rangle \leqslant 0\}) = \frac{L(r(a)r(b))}{\pi} = \frac{L(ab)}{\pi}.$$

II.B - Balayages orthogonaux

1. (a) Si $\langle a, \gamma(t)\rangle = 0$ ou $\langle a, \gamma(t+h)\rangle = 0$, alors on a bien $N_{[t,t+h]} \geqslant 1$. Sinon, $\langle a, \gamma(t)\rangle$ et $\langle a, \gamma(t+h)\rangle$ sont de signes contraires. Le théorème des valeurs intermédiaires appliqué à la fonction $x \mapsto \langle a, \gamma(x)\rangle$ entre t et $t+h$ assure l'existence de $c \in [t, t+h]$ tel que $\langle a, \gamma(c)\rangle = 0$. On a alors bien $N_{[t,t+h]} \geqslant 1$.

   (b) Soit $\varphi(x) = \langle a, \gamma(x)\rangle$. La fonction φ est dérivable et $\varphi'(x) = \langle a, \gamma'(x)\rangle$. Si $N_{[t,t+h]}(a) \geqslant 2$, alors il existe $x_1 < x_2 \in [t, t+h]$ tels que $\varphi(x_1) = \varphi(x_2) = 0$. Le théorème de Rolle assure alors qu'il existe $c \in]x_1, x_2[$ tel que $\varphi'(c) = 0$. Ainsi $a \perp \gamma'(c)$.
   L'inégalité de Cauchy-Schwarz fournit $|\varphi'(x)| \leqslant ||\gamma'(x)||$ et $|\varphi''(x)| \leqslant ||\gamma''(x)||$, et le théorème des accroissements finis permet d'écrire successivement

$$\forall x \in [t, t+h], |\varphi'(x)| \leqslant ||\gamma''||.|x-c| \leqslant ||\gamma''||h$$

$$|\langle a, \gamma(t)\rangle| = |\varphi(t)| = |\varphi(t) - \varphi(x_1)| \leqslant ||\gamma''||.h.|t-x_1| \leqslant ||\gamma''||h^2$$

   (c) En reprenant les notations précédentes, supposons sans perte de généralité que $\varphi(t) > 0$. La fonction $\varphi(t)$ s'annule en un point x_1 et atteint donc son minimum en un point c différent des extrémités du segment. En ce point on a donc $\varphi'(c) = 0$ et on conclut de la même façon qu'à la question précédente.

2. (a) Soit F l'ensemble

$$F = \{a \in S^{n-1} \,/\, |\langle a, \gamma(t)\rangle| \leqslant ||\gamma''||_\infty h^2\},$$

et soit G l'ensemble

$$G = \{a \in S^{n-1} \,/\, \langle a, \gamma(t)\rangle\langle a, \gamma(t+h)\rangle \leqslant 0\}.$$

On sait par II.A.5 que $\lambda_S(G) = \dfrac{L(\gamma(t)\gamma(t+h))}{\pi}$. Vérifions que la différence symétrique entre les ensembles G et $N^{-1}_{[t,t+h]}(1)$ est incluse dans F.

Si $a \in N^{-1}_{[t,t+h]}(1)\backslash G$, alors par 1c), $a \in F$. Donc

$$\lambda_S(N^{-1}_{[t,t+h]}(1)) \leqslant \lambda_S(G) + \lambda_S(F)$$

Si $a \in G\backslash N^{-1}_{[t,t+h]}(1)$, alors par 1a), $N_{[t,t+h]} \geqslant 2$ et par 1b), $a \in F$. Ainsi

$$\lambda_S(G) \leqslant \lambda_S(N^{-1}_{[t,t+h]}(1)) + \lambda_S(F)$$

et donc $|\lambda_S(G) - \lambda_S(N^{-1}_{[t,t+h]}(1))| \leqslant \lambda_S(F)$. Par ailleurs, la question II.A.1 fournit, à rotation près, l'inégalité

$$\lambda_S(F) \leqslant \frac{2^n h^2 ||\gamma''||_\infty}{\lambda_n(B_n)} = Ch^2$$

Pour l'écart ii), on sait par hypothèse que si $k > M$, alors $\lambda_S(N^{-1}(k)) = 0$. Par 1b), si $2 \leqslant k \leqslant M$,

$$\lambda_S(N^{-1}(k)) \leqslant \lambda_S(F) \leqslant Ch^2$$

Donc $\displaystyle\sum_{k=2}^{+\infty} k\lambda_S(N^{-1}(k)) \leqslant (M-1)MCh^2 \leqslant M^2Ch^2$ et $\left|\mathcal{A}_{[t,t+h]} - \lambda_S(N^{-1}(1))\right| \leqslant M^2Ch^2$. De plus, d'après II.A.4,

$$\left|\frac{L(\gamma(t)\gamma(t+h))}{\pi} - \frac{||\gamma(t) - \gamma(t+h)||}{\pi}\right| \leqslant Kh^2$$

Il vient donc $\left|\mathcal{A}_{[t,t+h]} - \dfrac{||\gamma(t) - \gamma(t+h)||}{\pi}\right| \leqslant (M^2C + C + K)h^2$.

(b) Si J est un intervalle point, $J = [t,t]$, alors $N_J^{-1}(k) = \emptyset$ si $k \geqslant 2$ et $N_J^{-1}(1) = \{a/a \perp \gamma(t)\}$. Ce dernier ensemble, ainsi que son cône engendré, est inclus dans un hyperplan de mesure nulle, donc $\mathcal{A}_J = 0$. On en déduit ainsi que si $t < t' < t''$, alors $\mathcal{A}_{[t,t'']} = \mathcal{A}_{[t,t']} + \mathcal{A}_{[t',t'']}$.
Considérons alors $u(x) = \mathcal{A}_{[t_0,x]}$, où t_0 est la borne inférieure de I. D'après la question précédente, on a

$$\frac{1}{h}\left|u(x+h) - u(x) - \frac{||\gamma(x) - \gamma(x+h)||}{\pi}\right| \leqslant (M^2C + C + K)h$$

Donc, en passant à la limite lorsque h tend vers 0^+, u est dérivable à droite en x et sa dérivée à droite vaut $\dfrac{||\gamma'(t)||}{\pi}$. On obtient de même que u est dérivable à gauche. Il ne reste plus qu'à intégrer pour obtenir $\mathcal{A}_I$.

Partie III
Le nombre moyen de zéros d'un polynôme.

III.A - Coefficients de même loi gaussienne.

1. On a $\mathbb{P}\left(\dfrac{a}{||a||} \in A\right) = \dfrac{1}{(2\pi)^{n/2}} \displaystyle\int_{\mathbb{R}^n} e^{-\frac{||x||^2}{2}} \mathbf{1}_{\frac{x}{||x||} \in A} d\lambda_n(x)$. Effectuons dans cette intégrale le changement de variable bijectif $x = r(u)$. On a alors :

$$\mathbb{P}\left(\frac{a}{||a||} \in A\right) = \frac{1}{(2\pi)^{n/2}} \int_{\mathbb{R}^n} e^{-\frac{||r(u)||^2}{2}} \mathbf{1}_{\frac{r(u)}{||r(u)||} \in A} |\det r| d\lambda_n(u)$$

Mais, comme r est une isométrie, on a

$$\mathbb{P}\left(\frac{a}{||a||} \in A\right) = \frac{1}{(2\pi)^{n/2}} \int_{\mathbb{R}^n} e^{-\frac{||u||^2}{2}} \mathbf{1}_{\frac{u}{||u||} \in r^{-1}(A)} d\lambda_n(u) = \mathbb{P}\left(\frac{a}{||a||} \in r^{-1}(A)\right).$$

2. Supposons tout d'abord que I est un segment. Fixons $a = (a_1, \ldots, a_n) \in \mathbb{R}^n$, non nul (ce qui est presque sûrement le cas). Le nombre de zéros de la fonction f associée est le cardinal de

$$\{t \in I \,/\, a_1 f_1(t) + a_2 f_2(t) + \cdots + a_n f_n(t) = 0\} = \{t \in I \,/\, \frac{a}{||a||} \perp \gamma(t)\}$$

Il s'agit donc bien de $N_I\left(\frac{a}{||a||}\right)$. Ainsi le nombre moyen de zéros dans l'intervalle I est l'espérance de $N_I\left(\frac{a}{||a||}\right)$. Comme la loi de $\frac{a}{||a||}$ est λ_S, on retrouve l'expression de $\mathcal{A}_I$. On a alors

$$\mathcal{A}_I = \frac{1}{\pi}\int_I ||\gamma'(t)||dt$$

puisque $\gamma(t)$ est, comme $v(t)$, de classe $\mathcal{C}^2$.

Pour conclure au cas où I n'est plus un segment, on écrit I comme la limite croissante d'une suite de segments I_p. Ainsi $N_I\left(\frac{a}{||a||}\right)$ est la limite croissante de $N_{I_p}\left(\frac{a}{||a||}\right)$, et le résultat $\mathcal{A}_{I_p} \to \mathcal{A}_I$ s'obtient par le théorème de convergence monotone.

3. Ecrivons $v(t) = u(t)\gamma(t)$, où $u(t) = ||v(t)||$, et $\gamma(t) \in S^{n-1}$. La fonction $u(t) = \sqrt{\langle v(t), v(t)\rangle}$ est $\mathcal{C}^2$. On a alors

$$\begin{aligned}
\varphi(x,y) &= \ln u(x) + \ln u(y) + \ln\langle\gamma(x),\gamma(y)\rangle \\
\frac{\partial\varphi}{\partial x}(x,y) &= \frac{u'(x)}{u(x)} + \frac{\langle\gamma'(x),\gamma(y)\rangle}{\langle\gamma(x),\gamma(y)\rangle} \\
\frac{\partial^2\varphi}{\partial x\partial y}(x,y) &= \frac{\langle\gamma'(x),\gamma'(y)\rangle}{\langle\gamma(x),\gamma(y)\rangle} - \frac{\langle\gamma'(x),\gamma(y)\rangle\langle\gamma(x),\gamma'(y)\rangle}{\langle\gamma(x),\gamma(y)\rangle^2}
\end{aligned}$$

Enfin, $\frac{\partial^2\varphi}{\partial x\partial y}(t,t) = \frac{||\gamma'(t)||^2}{||\gamma(t)||^2} - \frac{\langle\gamma'(t),\gamma(t)\rangle^2}{||\gamma(t)||^4}$. Mais comme $\gamma(t) \perp \gamma'(t)$ et que $||\gamma(t)|| = 1$, il reste

$$||\gamma'(t)||^2 = \frac{\partial^2\varphi}{\partial x\partial y}(t,t).$$

4. Les fonctions $(1, t, \ldots, t^n)$ forment bien un système libre de fonctions $\mathcal{C}^2$ qui ne s'annulent pas simultanément. La majoration de N_I par n est effective par le fait qu'un polynôme non nul (c'est presque sûrement le cas) admet au plus n zéros. Donc le nombre moyen de zéros réels du polynôme P dans un intervalle quelconque I est

$$\frac{1}{\pi}\int_I ||\gamma'(t)||dt$$

Dans le cas présent, $\varphi(x,y) = \ln(1 + xy + x^2y^2 + \cdots + x^ny^n) = \ln\left(\frac{1-(xy)^{n+1}}{1-xy}\right)$, en supposant que $xy \neq 1$. On a alors

$$\begin{aligned}
\frac{\partial\varphi}{\partial x}(x,y) &= \frac{-(n+1)y^{n+1}x^n}{1-(xy)^{n+1}} + \frac{y}{1-xy} \\
\frac{\partial^2\varphi}{\partial x\partial y}(x,y) &= \frac{(n+1)^2x^ny^n((xy)^{n+1}-1) - (n+1)y^{n+1}x^n(n+1)x^{n+1}y^n}{(1-(xy)^{n+1})^2} + \frac{1}{(1-xy)^2}
\end{aligned}$$

On obtient alors, lorsque $t^2 \neq 1$, $||\gamma'(t)||^2 = \frac{1}{(t^2-1)^2} - \frac{(n+1)^2t^{2n}}{(t^{2n+2}-1)^2}$. Si l'intervalle I ne contient pas ± 1, le nombre moyen de zéros de P sur I est

$$\frac{1}{\pi}\int_I \sqrt{\frac{1}{(t^2-1)^2} - \frac{(n+1)^2t^{2n}}{(t^{2n+2}-1)^2}}dt$$

La parité de $||\gamma'(t)||$ et le changement de variable $t \mapsto \dfrac{1}{t}$ prouvent que les intégrales sur les domaines $]-\infty,-1[$, $]-1,0[$, $]0,1[$, $]1,+\infty[$ sont égales, et donc que

$$\int_{\mathbb{R}} ||\gamma'(t)||dt = 4\int_1^{+\infty} ||\gamma'(t)||dt = E_n.$$

III.B - Une classe de polynômes circulaires

1. (a) La linéarité de L_θ est évidente de E dans $\mathbb{R}[X,Y]$. Le fait que Im $L_\theta \subset E$ se vérifie sur la base canonique (X^kY^{n-k}) :

$$L_\theta(X^kY^{n-k}) = (\cos\theta X + \sin\theta Y)^k(-\sin\theta X + \cos\theta Y)^{n-k}$$

qui est bien homogène de degré n en X et Y.

Il est clair que $L_\theta \circ L_{\theta'} = L_{\theta+\theta'}$. Notamment, les deux applications commutent.

(b) Fixons θ et P. On a pour $h \neq 0$, $\dfrac{L_{\theta+h}(P) - L_\theta(P)}{h} = \dfrac{(L_h - L_0)(L_\theta(P))}{h}$.

Pour tout polynôme X^kY^{n-k}, considérons

$$f(h) = L_h(X^kY^{n-k}) = (\cos(h)X + \sin(h)Y)^k(-\sin(h)X + \cos(h)Y)^{n-k}.$$

La dérivée de f en 0 est

$$f'(0) = kX^{k-1}Y^{n+1-k} - (n-k)X^{k+1}Y^{n-(k+1)} = A.X^kY^{n-k}$$

la formule étant valable aussi pour $k=0$ et $k=n$. Par linéarité, pour tout polynôme P, on a

$$\frac{(L_h - L_0)(P)}{h} \underset{h\to 0}{\longrightarrow} A.P$$

Et en particulier,

$$\frac{\partial(L_\theta(P))}{\partial\theta} = \lim_{h\to 0}\frac{L_{\theta+h}(P) - L_\theta(P)}{h} = A.L_\theta(P)$$

(c) Considérons des réels $\lambda_0, \dots, \lambda_n$ positifs et $D = \begin{pmatrix} \lambda_0 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \lambda_n \end{pmatrix}$. On a alors

$$DAD^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & 1.\dfrac{\lambda_0}{\lambda_1} & 0 & \cdots & 0 \\ -n.\dfrac{\lambda_1}{\lambda_0} & \ddots & 2 & \ddots & \vdots \\ 0 & -(n-1).\dfrac{\lambda_2}{\lambda_1} & \ddots & \ddots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & n.\dfrac{\lambda_{n-1}}{\lambda_n} \\ 0 & \cdots & 0 & -1.\dfrac{\lambda_n}{\lambda_{n-1}} & 0 \end{pmatrix}$$

Ainsi, DAD^{-1} est antisymétrique si et seulement si pour tout $k \leqslant n-1$, $(n-k)\dfrac{\lambda_{k+1}}{\lambda_k} = (k+1)\dfrac{\lambda_k}{\lambda_{k+1}}$, soit encore $\lambda_{k+1}^2 = \lambda_k^2\dfrac{k+1}{n-k}$. Avec la condition $\lambda_k > 0$ et $\lambda_0 = 1$, on obtient

$$\lambda_k^2 = \lambda_0^2\frac{1\times 2\times\cdots\times k}{n\times(n-1)\times\cdots\times(n-(k-1))} = \binom{n}{k}^{-1}.$$

La matrice D qui convient est alors $D = \begin{pmatrix} 1/\sqrt{\binom{n}{0}} & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & 1/\sqrt{\binom{n}{n}} \end{pmatrix}$

(d) Fixons P, et considérons $f(\theta) = L_\theta(P)$. On a $f(0) = P$ et $f'(\theta) = A.f(\theta)$. On en déduit que $f(\theta) = \exp(\theta A).P$, soit encore $L_\theta(P) = \exp(\theta A)P$. Ainsi

$$DL_\theta(P) = D\exp(\theta A)D^{-1}DP = \exp(\theta DAD^{-1})DP = Q(\theta)DP$$

où $Q(\theta) = \exp(\theta DAD^{-1})$ est bien orthogonale puisque DAD^{-1} est antisymétrique (c'est même une rotation puisque l'exponentielle des matrices réelles est à valeurs dans $GL_n^+(\mathbb{R})$).

2. (a) Soit B un borélien de E. $\mathbb{P}(L_\theta(P) \in B) = \mathbb{P}(DL_\theta(P) \in DB) = \mathbb{P}(DP \in Q(\theta)^{-1}DB)$. Or la variable $DP = \left(a_0\binom{n}{0}^{-1/2}, \ldots, a_n\binom{n}{n}^{-1/2}\right)$ suit une loi gaussienne centrée invariante par rotation, et donc

$$\mathbb{P}(L_\theta(P) \in B) = \mathbb{P}(DP \in Q(\theta)^{-1}DB) = \mathbb{P}(DP \in DB) = \mathbb{P}(P \in B)$$

Donc les variables $L_\theta(P)$ et P ont même loi.

(b) On pose $\alpha_k = a_k\binom{n}{k}^{-1/2}$. Les α_k suivent une loi gaussienne centrée de variance 1, et le nombre de zéros de $P = \sum_k a_k X^k$ est le même que le nombre de zéros de la fonction $t \mapsto \sum_k \alpha_k \binom{n}{k}^{1/2} t^k$. On utilise alors la formule III.A.2 avec

$$v(t) = \left(\binom{n}{0}^{1/2} t^0, \ldots, \binom{n}{k}^{1/2} t^k, \ldots, \binom{n}{n}^{1/2} t^n\right)$$

On a, avec les notations de III.A.3,

$$\varphi(x, y) = \ln \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} x^k y^k = \ln(1 + xy)^n = n\ln(1 + xy)$$

On obtient alors $\dfrac{\partial\varphi}{\partial x}(x, y) = \dfrac{ny}{1 + xy}$ et $\dfrac{\partial^2\varphi}{\partial x\partial y}(x, y) = \dfrac{n(1 + xy) - nxy}{(1 + xy)^2}$, ce qui conduit à

$$||\gamma'(t)|| = \frac{\sqrt{n}}{1 + t^2}$$

Ainsi, le nombre de zéros de P dans l'intervalle $]a, b[$ est

$$\frac{\sqrt{n}}{\pi}\int_a^b \frac{1}{1 + t^2}dt = \frac{\sqrt{n}}{\pi}(\arctan b - \arctan a)$$

En particulier, si $]a, b[= \mathbb{R}$, le nombre moyen de zéros sur $\mathbb{R}$ est $\sqrt{n}$, ce qui est sensiblement différent des $\dfrac{2}{\pi}\ln n$ du cas précédent.

Partie IV
Quelques résultats sur les séries aléatoires

IV.A - Majoration du nombre de racines d'un polynôme.

1. (a) On peut raisonner sur les coefficients de Q, mais aussi remarquer qu'on a la formule de Parseval :

$$||Q||^2 = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} Q(e^{i\theta})\overline{Q(e^{i\theta})}d\theta = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} |Q(e^{i\theta})|^2 d\theta$$

Or, $|e^{i\theta} + z| = |1 + e^{-i\theta}z| = |1 + e^{i\theta}\overline{z}|$, donc

$$\left|\big((X + z)Q(X)\big)(e^{i\theta})\right| = \left|\big((1 + X\overline{z})Q(X)\big)(e^{i\theta})\right|$$

En s'intégrant, cette égalité donne bien $||(X + z)Q(X)|| = ||(\overline{z}X + 1)Q(X)||$.

(b) Si $|z| > 1$, alors $-z$ est racine de $(X+z)Q(X)$ et $-\dfrac{1}{z}$ est racine de $(\overline{z}X+1)Q(X)$. Donc on a

$$M((X+z)Q(X)) = M((\overline{z}X+1)Q(X))$$

puisque la perte de la racine $(-z)$ est compensée par le produit du coefficient dominant par $\overline{z}$. On peut alors montrer l'inégalité demandée par récurrence sur le nombre de racines de module supérieur à 1. L'initialisation dans le cas où toutes les racines sont de module $\leqslant 1$ est triviale, puisqu'on a alors $M^2(P) = |a_n|^2 \leqslant ||P||^2$.

2. Considérons le polynôme $P = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} a_k X^k$ et soit $\rho > 1$. Soit Z le nombre de racines de module supérieur à ρ. On a

$$|a_n|\rho^Z \leqslant M(P) \leqslant ||P|| \text{ et donc } Z \leqslant \frac{\ln \frac{||P||}{|a_n|}}{\ln \rho}$$

Maintenant, prenons $\rho \in]0,1[$. Les racines de P de module $\leqslant \rho$ sont exactement les inverses des racines de

$$X^n P\left(\frac{1}{X}\right) = a_n + a_{n-1}X + \cdots + a_0 X^n$$

de module $\geqslant \dfrac{1}{\rho}$. Il y en a donc moins de $\dfrac{1}{\ln \frac{1}{\rho}} . \ln \dfrac{\sqrt{\sum_{k=0}^{n} a_k^2}}{|a_0|}$.

Enfin, si on pose $Q(X) = P(\rho X)$, il y a autant de racines de Q de module inférieur à ρ que de racines de P de module inférieur à ρ^2, soit moins de

$$\frac{1}{\ln \frac{1}{\rho}} . \ln \frac{\sqrt{\sum_{k=0}^{n} a_k^2 \rho^{2k}}}{|a_0|}$$

IV.B - Cas de la série $\displaystyle\sum_{k=0}^{+\infty} \frac{a_k}{\sqrt{k!}} x^k$.

1. Considérons l'évènement $|a_k| \geqslant k$. Pour $k \geqslant 2$, on a

$$\mathbb{P}(|a_k| \geqslant k) = \frac{2}{\sqrt{2\pi}} \int_k^{+\infty} e^{-t^2/2} dt \leqslant \frac{2}{\sqrt{2\pi}} \int_k^{+\infty} e^{-t} dt \leqslant e^{-k}$$

en utilisant le fait que $\dfrac{2}{\sqrt{2\pi}} \leqslant 1$. Par le lemme de Borel-Cantelli, on a presque sûrement $|a_k| \leqslant k$ pour tout k assez grand. Comme la série $\displaystyle\sum \frac{k}{\sqrt{k!}} x^k$ converge pour tout x réel (par la règle de D'Alembert par exemple), il en est de même de la série $\displaystyle\sum_{k=0}^{+\infty} \frac{a_k}{\sqrt{k!}} x^k$.

2. D'après le théorème des zéros isolés, $Z_{[a,b]}(f)$ est finie dès que les a_k sont non tous nuls, ce qui est vrai presque sûrement.

Fixons $(a_1, a_2, \dots)$. On a alors défini f' qui admet un nombre fini de zéros $z_1, z_2, \dots, z_p$ sur $[a,b]$. Posons $g(x) = \displaystyle\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{a_k}{\sqrt{k!}} x^k$. Alors $f(z_j) = 0$ si et seulement si $a_0 = -g(z_k)$, ce qui arrive avec une probabilité nulle. Ainsi, $(a_1, a_2, \dots)$ étant fixés, la probabilité que f et f' aient un zéro commun est nulle. Le théorème de Fubini permet alors de conclure que la probabilité que f et f' aient un zéro commun est nulle.

Maintenant, fixons $(a_k)_{k \geq 0}$ tels que f et f' n'aient pas de zéro commun, que $f(a)$ et $f(b)$ soient non nuls, et que la série entière définissant f soit de rayon $+\infty$. Ces conditions sont presque sûrement réalisées. La théorie des séries entières assure alors que S_n converge uniformément vers f et que S_n' converge uniformément vers f'.

Soient $a < z_1 < z_2 < \cdots < z_p < b$ les zéros de f dans $[a,b]$. Soit ε tel que les intervalles $[z_k - \varepsilon, z_k + \varepsilon]$ ne contiennent pas de zéros de f'. On pose

- $\alpha = \inf |f(t)|$ pour $t \in [a,b]$ privé des intervalles $]z_k - \varepsilon, z_k + \varepsilon[$.
- $\beta = \inf |f'(t)|$ pour t parcourant les segments $[z_k - \varepsilon, z_k + \varepsilon]$.

Par un argument simple de compacité, $\alpha > 0$ et $\beta > 0$.

Pour n assez grand, $||S_n - f|| \leqslant \dfrac{\alpha}{2}$ et donc S_n n'admet pas de zéros en dehors des intervalles $[z_k - \varepsilon, z_k + \varepsilon]$.

Pour n assez grand, $||S_n' - f'|| \leqslant \dfrac{\beta}{2}$, donc S_n' n'admet pas de zéros dans ces intervalles. Ainsi, S_n est strictement monotone sur ces segments et admet au plus un zéro dans ces intervalles.

Or, si $||S_n - f|| \leqslant \dfrac{\alpha}{2}$, le signe de S_n et de f est le même en $z_k - \varepsilon$ et en $z_k + \varepsilon$. Comme f' ne s'annule pas sur $[z_k - \varepsilon, z_k + \varepsilon]$, f y est strictement monotone et donc change de signe. Il en est donc de même pour S_n, qui admet au moins un zéro sur $[z_k - \varepsilon, z_k + \varepsilon]$

En conclusion, pour n assez grand, $Z_{[a,b]}(S_n) = Z_{[a,b]}(f)$ (presque sûrement).

3. Pour passer de la convergence simple à l'espérance, on se place dans les hypothèses du théorème de convergence dominée. On considère $M > 0$ tel que $[a,b] \subset [-M, M]$ et on va construire une majoration de $Z_{[-M,M]}(S_n)$ par une variable aléatoire intégrable ne dépendant pas de n.

Le nombre de racines de $S_n = \sum_{k=0}^{n} \dfrac{a_k}{\sqrt{k!}} X^k$ réelles et de module inférieur à M est plus petit que le nombre de racines complexes de $S_n(2MX)$ de module inférieur à $\dfrac{1}{2}$. D'après la question IV.A.2, ce nombre est inférieur à

$$\frac{1}{\ln\sqrt{2}} . \ln \frac{\sqrt{\sum_{k=0}^{n} \frac{a_k^2}{k!} \frac{(2M)^{2k}}{2^k}}}{|a_0|}$$

Ainsi, sous réserve de définition, $Z_{[-M,M]}(S_n)$ est majoré par

$$Y = \frac{1}{\ln\sqrt{2}} \left(\frac{1}{2} \ln \left(\sum_{k=0}^{+\infty} \frac{a_k^2}{k!} (2M^2)^k \right) - \ln |a_0| \right)$$

Comme presque sûrement $a_0 \neq 0$ et $|a_k| \leqslant k$ pour k assez grand, la variable Y est définie. Reste à prouver qu'elle est intégrable :

- La variable $-\ln |a_0|$ est intégrable, puisque l'intégrale $\displaystyle\int_{\mathbb{R}} -\ln |t| e^{-t^2/2} dt$ converge.
- Posons $W = \ln \left(\displaystyle\sum_{k=0}^{+\infty} \frac{a_k^2}{k!} (2M^2)^k \right)$. Si $W < 0$, alors $W \geqslant \ln |a_0|$, donc $W^- = -\min(W, 0)$ est intégrable. Par ailleurs, si $W \geqslant 0$, alors par l'inégalité $\ln(x) \leqslant x$ on a $W^+ \leqslant \displaystyle\sum_{k=0}^{+\infty} \frac{a_k^2}{k!} (2M^2)^k$. Or, comme l'espérance de a_k^2 est égale à 1, la série $\sum \mathbb{E} \left(\dfrac{a_k^2}{k!} (2M^2)^k \right)$ converge. Comme L^1 est complet, la variable aléatoire $\sum \dfrac{a_k^2}{k!} (2M^2)^k$ est intégrable. Il en est donc de même de W^+.

Au final, la variable aléatoire Y est intégrable. Le théorème de convergence dominée permet alors d'affirmer que $\mathbb{E}(Z_{[a,b]}(S_n)) \to \mathbb{E}(Z_{[a,b]}(f))$.

D'après la question III.A, $\mathbb{E}(Z_{[a,b]}(S_n)) = \dfrac{1}{\pi} \displaystyle\int_a^b ||\gamma_n'(t)|| dt$, où $\gamma_n(t)$ est la projection sur S^n de $v_n(t) =$

$\left(1, \frac{t}{\sqrt{1!}}, \dots, \frac{t^n}{\sqrt{n!}}\right)$. On a, avec les notations de III.A,

$$\begin{aligned}
\varphi(x,y) &= \ln \sum_{k=0}^{n} \frac{(xy)^k}{k!} \\
\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x \partial y}(x,y) &= \frac{\sum_{k=0}^{n-1} \frac{(xy)^k}{k!} \times \sum_{k=0}^{n} \frac{(xy)^k}{k!} + xy \sum_{k=0}^{n-2} \frac{(xy)^k}{k!} \times \sum_{k=0}^{n} \frac{(xy)^k}{k!} - xy \sum_{k=0}^{n-1} \frac{(xy)^k}{k!} \times \sum_{k=0}^{n-1} \frac{(xy)^k}{k!}}{\left(\sum_{k=0}^{n} \frac{(xy)^k}{k!} \times \sum_{k=0}^{n} \frac{(xy)^k}{k!}\right)^2} \\
||\gamma_n'(t)||^2 &= \frac{f_{n-1}(t) f_n(t) + t^2 f_{n-2}(t) f_n(t) - t^2 f_{n-1}^2(t)}{f_n^2(t)}
\end{aligned}$$

où $f_n(t) = \sum_{k=0}^{n} \frac{t^{2k}}{k!}$. Comme $f_n(t)$ converge uniformément sur $[a,b]$ vers e^{t^2}, $||\gamma_n'(t)||^2$ converge uniformément vers 1. D'où

$$\mathbb{E}(Z_{[a,b]}(f)) = \frac{b-a}{\pi}$$

IV.C - Cas de la série $\sum_{k=0}^{+\infty} a_k x^k$.

De même qu'en IV.B.1, on vérifie que presque sûrement, $\frac{1}{k^2} \leqslant |a_k| \leqslant k^2$ pour k assez grand, et ainsi le rayon de la série est presque sûrement 1.

Le fait que f et f' ont presque sûrement un nombre fini de zéros et aucun zéro commun se prouve de la même façon qu'en IV.B, ainsi que la convergence presque sûre de $Z_{[a,b]}(S_n)$ vers $Z_{[a,b]}(f)$.

Si $[a,b] \subset [-\rho^2, \rho^2]$, on a la majoration $Z_{[a,b]}(S_n) \leqslant \frac{1}{\ln \frac{1}{\rho}} . \ln \frac{\sqrt{\sum_{k=0}^{n} a_k^2 \rho^{2k}}}{|a_0|}$ qui permet d'utiliser la convergence dominée.

La convergence dans L^1 de $\sum_k a_k^2 \rho^{2k}$ provient des mêmes arguments que tout à l'heure. On a alors

$$\mathbb{E}\big(Z_{[a,b]}(S_n)\big) = \frac{4}{\pi} \int_a^b \sqrt{\frac{1}{(1-t^2)^2} - \frac{(n+1)^2 t^{2n}}{(1-t^{2n+2})^2}} dt$$

qui tend par convergence dominée (intégrande $\leqslant \sqrt{\frac{1}{(1-t^2)^2}}$) vers

$$\mathbb{E}\big(Z_{[a,b]}(f)\big) = \frac{4}{\pi} \int_a^b \frac{1}{1-t^2} dt = \frac{4}{\pi} (\text{argth } b - \text{argth } a)$$

References

[1] Edelman A, Kostlan E. *How many zeros of a random polynomial are real ?*, Bull. Am. Math. Soc. 32 (1995), pp 1-37.

[2] Kac M, *On the average number of real roots of a random algebraic equation*, Bull. Am. Math. Soc. 49 (1943), pp 314-320.

[3] Kac M, *On the average number of real roots of a random algebraic equation (II)*, Bull. Am. Math. Soc. 50 (1949), pp 390-408.

[4] Mignotte M., *Mathématiques pour le calcul formel*, PUF, 1989